Année universitaire 2012-2013
Semestre 4

Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Kénitra

Examen Analyse Numérique

Durée 1H30

La présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.

Bonne chance.

Note: Rédiger un seul exercice au choix

Exercice 1 Dans toute la suite on considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ où $a < b$, et on suppose qu'il existe un unique réel $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

1. On suppose ici que f est strictement croissante et que $f(a) < 0 < f(b)$.
   (a) Par le principe de la dichotomie, montrer que l'on peut construire une suite (a_n) d'éléments de $[a,b]$ telles que (a_n) converge vers α et que
   $$|a_n - \alpha| \leq \frac{(b-a)}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   (b) **Application:** Ici $f(x) = xe^{x^2} - 1$ et $[a,b] = [0,1]$. En utilisant la suite (a_n) précédente, donnez une valeur approchée à 10^{-2} prés de α.
2. On suppose ici que f est une fonction de classe C^2 telle que: $f(a) < 0 < f(b)$, f' et f'' sont strictement positives sur $[a,b]$.
   (a) Vérifier qu'il existe un unique réel $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = 0$ et faites un schéma clair en tenant compte des hypothèses faites sur f, α, a et b.
   (b) On pose $a_0 = a$. Montrer que la corde qui joint les points $(a_0, f(a_0))$ et $(b, f(b))$ coupe l'axe des abscisses en un point unique $(a_1, 0)$ et calculez a_1 en fonction de a_0 et b.
   En partant cette fois ci de la corde qui joint les points $(a_1, f(a_1))$ et $(b, f(b))$, on construit $(a_2, 0)$ point d'intersection de cette nouvelle corde avec l'axe des abscisses.
   Ainsi, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on construit la suite (a_n).
   Sur le même schéma, construisez **graphiquement** les points $(a_1, 0)$, $(a_2, 0)$ et $(a_3, 0)$.
   (c) Montrer que
   $$a_{n+1} = a_n - \frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} f(a_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
   (d) Montrer que la suite (a_n) converge et que sa limite est α.
   (e) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha}$. Cette méthode peut-elle être d'orde 2?

Exercice 2 On considère ici une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^3 et on suppose qu'il existe un entier $m \geq 1$ et une fonction h tels que $f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$ avec $h(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

On pose
$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
et on considère la suite (x_n) définie par
$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad x_0 \in [a,b]$$

1. On suppose ici que $m = 1$ et que f' et f'' sont strictement positives sur $[a, b]$.

   (a) Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2}$ en fonction de f et de α.

   Que conclure concernant l'ordre de convergence de la suite (x_n).

   (Indication: On pourra utiliser une formule de Taylor ...)

   (b) Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

   $$|x_{n+1} - \alpha| \leq M\, |x_n - \alpha|^2$$

   pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que

   $$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{M} \left(M\, |x_0 - \alpha|\right)^{2^n}$$

   pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) M étant fixé, comment choisir x_0 et $n \in \mathbb{N}$ pour que x_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

   (d) <u>**Application:**</u> Ici $f(x) = xe^{x^2} - 1$ et $[a, b] = [0, 1]$. En utilisant la suite (x_n) précédente, donnez une valeur approchée à 10^{-2} prés de α.

2. Maintenant on suppose que $m \geq 2$ et que la suite (x_n) est toujours bien définie.

   (a) Calculer $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} \right|$. La méthode de Newton dans ce cas peut-elle être d'orde 2?

   On utilise maintenant une variante de la méthode de Newton et on définit la suite (y_n) par

   $$y_{n+1} = y_n + m\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \quad y_0 \in [a, b]$$

   et on suppose que (y_n) est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1} - \alpha}{y_n - \alpha}$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1} - \alpha}{(y_n - \alpha)^2}$ en fonction de h, m et α.

   (c) En déduire que la suite (y_n) converge avec un ordre $p \geq 2$.